一、向心加速度的定义

向心加速度是物体做圆周运动时，由于速度方向不断改变而产生的加速度，其方向始终指向圆心，大小为$a_n = \dfrac{v^2}{r} = \omega^2 r$。

- **物理意义**：描述速度方向变化的快慢，而非速度大小的变化。
- **方向特性**：无论匀速还是变速圆周运动，向心加速度方向始终指向圆心。
- **公式表达**：

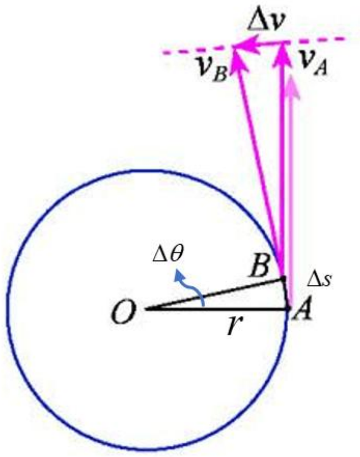
$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

二、向心加速度的推导

方法 1：基于矢量变化的推导

假设物体做匀速圆周运动，线速度大小为 v，半径为r，在极短时间Δt内从点 A 运动到点 B，速度矢量变化为$\Delta\vec{v}$。

1. **速度矢量关系**：
   - 点 A 和点 B 的速度大小均为v，方向分别沿切线。
   - 速度变化量 Δv 的几何关系近似为以v为边的等腰三角形顶角对应的底边



2. **加速度定义**：

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

3. **几何关系**：
   - 圆心角 $\Delta\theta = \dfrac{\Delta s}{r} = \dfrac{v\Delta t}{r}$ 。
   - 当 $\Delta t \to 0$ 时，$\Delta\theta$ 极小，$\Delta v \approx v\Delta\theta$。
4. **代入极限**：

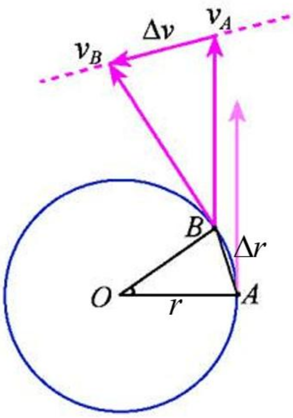
$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v\Delta\theta}{\Delta t} = v \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = v\omega$$

结合 $\omega=\frac{v}{r}$，得：

$$a_n=\frac{v^2}{r}=\omega^2 r$$

方法 2：利用几何相似三角形

在匀速圆周运动中，位移矢量 $\Delta\vec{r}$ 与速度矢量变化 $\Delta\vec{v}$ 的几何关系相似。



1. **相似三角形比例：**

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v}=\frac{|\Delta\vec{r}|}{r}$$

2. **加速度表达式：**

$$a_n=\frac{|\Delta\vec{v}|}{v}=\frac{v}{r}\cdot\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$$

由于 $\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}=v$，代入得：

$$a_n=\frac{v^2}{r}$$

三、向心加速度的公式总结

向心加速度可通过不同物理量表达，适用于不同情境：

公式	**适用场景**	**推导依据**
$a_n=\frac{v^2}{r}$	已知线速度 v 和半径 r	矢量变化或几何相似性推导
$a_n=\omega^2 r$	已知角速度 ω 和半径 r	角速度与线速度关系 $v=\omega r$
$a_n=\frac{4\pi^2}{T^2}r$	已知周期 T 和半径 r	周期与角速度关系 $\omega=\frac{2\pi}{T}$

四、理解要点

1. **方向特性**：
    - 向心加速度方向始终指向圆心，与速度方向垂直，仅改变速度方向，不改变速度大小。
2. **匀速 vs 变速圆周运动**：
    - **匀速圆周运动**：仅有向心加速度，无切向加速度。
    - **变速圆周运动**：总加速度为向心加速度与切向加速度的矢量和。
3. **物理本质**：
    - 向心加速度由合外力（向心力）产生，遵循牛顿第二定律 $F_n = ma_n$。