

万有引力定律发现的过程和具体推导

一、历史背景与思想萌芽

1. 科学革命的土壤（17世纪中叶）

- 伽利略的遗产：惯性定律、自由落体定律（重力作用下的匀加速运动）。
- 开普勒的三大定律：精确的行星运动规律（椭圆轨道、面积定律、调和定律）。
- 笛卡尔的漩涡理论：试图用以太漩涡解释行星运动（后被牛顿推翻）。

2. 牛顿的灵感触发（1665-1666年）

- 瘟疫与乡居：剑桥因瘟疫关闭，牛顿回到伍尔索普庄园，进入「奇迹年」。
- 苹果传说的真相：牛顿晚年回忆录中提到苹果下落启发他思考「月球是否也被地球引力牵引」，但核心是将地球引力扩展到天体运动的直觉。

二、关键推导步骤

1. 统一「天上」与「地上」的力（思想实验）

牛顿提出一个革命性假设：

使苹果下落的力（重力）与维持月球绕地球运动的力本质相同，只是随距离衰减。

数学验证：

- 已知地球表面重力加速度 $g = 9.8m/s^2$ 。
- 月球轨道半径 $r_{月} \approx 60R_{地}$ （ $R_{地}$ 为地球半径）。
- 若引力服从平方反比律，月球加速度应为：

$$a_{月} = \frac{g}{60^2} \approx 0.0027m/s^2$$

- 实际月球向心加速度（通过 $a_{月} = \frac{4\pi^2}{T^2} r_{月}$ 计算，）也约为 $0.0027m/s^2$ ，验证了平方反比假设。

2. 从开普勒定律到万有引力（数学推导）

步骤一：行星运动的向心力公式

假设行星绕太阳作匀速圆周运动（近似椭圆为圆），太阳引力提供向心力：

$$F = m \frac{v^2}{r}$$

结合开普勒第三定律 $T^2 \propto r^3$ ，行星速度 $v = \frac{2\pi r}{T}$ ，代入得：

$$F \propto \frac{m}{r^2}$$

结论：引力与距离平方成反比，与行星质量 m 成正比。

步骤二：引入对称性（牛顿第三定律）

若太阳对行星的引力为 $F \propto \frac{m}{r^2}$ ，则行星对太阳的力也应满足相同关系，因此引力应与**两物体质量乘积**成正比：

$$F \propto \frac{M_{\text{太阳}} m}{r^2}$$

步骤三：普适常数与万有引力公式

加入比例常数 G ，得到：

$$F = G \frac{M_{\text{太阳}} m}{r^2}$$

推广到任意两物体：

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

3. 椭圆轨道的严格证明（《自然哲学的数学原理》，1687年）

牛顿用微积分（“流数法”）证明：

- 若物体受**中心力** $F \propto \frac{1}{r^2}$ ，则其轨迹为圆锥曲线（椭圆/抛物线/双曲线）。
- 结合开普勒面积定律（角动量守恒），进一步验证引力是**有心力**（指向太阳）。

三、突破性贡献与争议

1. 科学意义

- **统一性：**首次用同一方程描述苹果下落与行星运动。
- **可预测性：**解释了潮汐、彗星轨迹、地球扁率等现象，并预言海王星存在。

- **数学化**：将物理问题转化为微分方程求解，奠定经典力学框架。

2. 历史争议

- **胡克与优先权之争**：胡克声称早于牛顿提出平方反比思想，但缺乏数学证明。
- **牛顿的沉默**：因恐惧争议，牛顿推迟 20 年发表成果，直至哈雷劝说其撰写《自然哲学的数学原理》

四、万有引力定律的现代表述

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

- **G**：万有引力常数（1798 年，卡文迪许首次利用扭秤实验测量出数值为 $6.67 \times 10^{-11} N \cdot m^2 / kg^2$ ）。
- **适用范围**：宏观低速弱引力场（强场或高速需广义相对论修正）。

五、“牛顿方法”的启示

1. **物理直觉与数学严谨的结合**：从苹果到月球的类比是直觉飞跃，但严格证明需微积分工具。
 2. **站在巨人肩上**：开普勒的数据、伽利略的运动定律、笛卡尔的解析几何均为关键基石。
 3. **科学革命的范式**：从现象归纳（开普勒）到原理演绎（牛顿），标志现代科学方法的成熟。
-
1. 牛顿在建立万有引力定律的过程中进行了著名的“月地检验”。已知月地距离约为地球半径 60 倍，若想检验“使月球绕地球运动的力”与“使苹果落地的力”是否遵循同样的规律，需要验证（ ）
 - A.地球吸引苹果的力约为地球吸引月球的力的 $\frac{1}{60}$
 - B.地球吸引苹果的力约为地球吸引月球的力的 $\frac{1}{60^2}$
 - C.月球公转的加速度约为苹果落向地面加速度的 $\frac{1}{60}$
 - D.月球公转的加速度约为苹果落向地面加速度的 $\frac{1}{60^2}$

【答案】 D

2. 月地检验是验证地球与月球间的吸引力与地球对树上苹果的吸引力是同一种性质的力的最初证据。月地检验可以这样思考，地球可以看成质量均匀、半径为 R 的均匀球体，质量为 m_0 的物体静止在地面上时对地面的压力大小为 F 。(1)地面上物体的重力加速度大小 g 可以表示为_____（用 m_0 和 F 表示）。(2)若已知引力常量为 G ，地球的质量为 M ，忽略地球的自转，则 $GM =$ _____（用 m 和 R 表示）。(3)若已知月球和地球之间的距离为 r ，月球绕地球的运动可以看成是匀速圆周运动，月球绕地球运动的周期为 T 。则月球的向心加速度大小可表示为_____（用 r 和 T 表示）。(4)月球绕地球做匀速圆周运动的向心力由地球对其吸引力提供，据此可以得到 $GM =$ _____（用 r 和 T 表示）。(5)根据上面的分析，只要能验证 $F =$ _____（用 m_0 、 R 、 r 和 T 表示），就能证明地球与月球间的吸引力与地球对树上苹果的吸引力是同一种性质的力。

【答案】 (1) $\frac{F}{m_0}$ (2) $\frac{FR^2}{m_0}$ (3) $\frac{4\pi^2}{T^2} r$ (4) $\frac{4\pi^2}{T^2} r^3$ (5) $\frac{4\pi^2 m_0}{R^2 T^2} r^3$