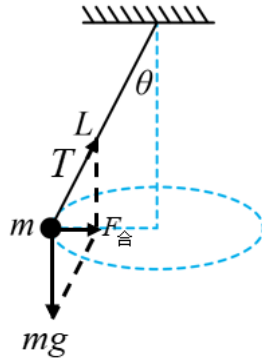


水平面内的圆周运动之圆锥摆



一、基础参量计算

考法说明：已知摆长 L 、摆角 θ 或周期 T ，求线速度 v 、角速度 ω 、周期 T 或拉力 T 。

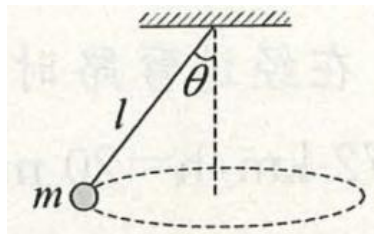
核心公式：

$$T \sin \theta = m\omega^2 r, \quad T \cos \theta = mg, \quad r = L \sin \theta$$

联立解得：

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L \cos \theta}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}}, \quad v = \omega r = \sqrt{\frac{gL \sin^2 \theta}{\cos \theta}}$$

例 1. 细线一端拴一个小球，另一端固定。设法使小球在水平面内做匀速圆周运动，如图所示，细线与竖直方向夹角为 θ ，线长为 l ，小球质量为 m ，重力加速度为 g 。求：



- (1) 绳子对小球的拉力大小；
- (2) 小球运动的向心加速度大小；
- (3) 小球运动的线速度大小；
- (4) 小球运动的周期。

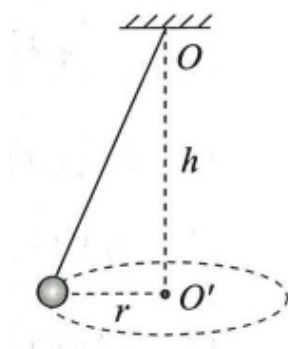
【答案】 (1) $\frac{mg}{\cos \theta}$

(2) $g \tan \theta$

(3) $\sqrt{gl \sin \theta \tan \theta}$

(4) $2\pi \sqrt{\frac{l \cos \theta}{g}}$

例 2. 如图所示，细线下面悬挂一个小钢球（可看作质点），钢球在水平面内以 O' 为圆心做匀速圆周运动。若测得钢球做圆周运动的轨道半径为 r ，悬点 O 到圆心 O' 之间的距离为 h ，钢球质量为 m 。忽略空气阻力，重力加速度为 g 。求：



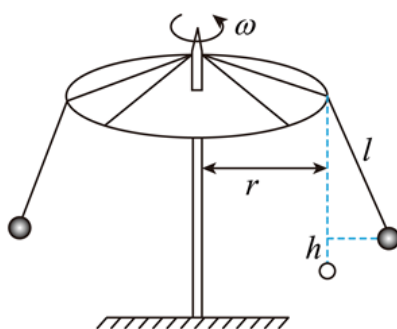
- (1) 钢球做匀速圆周运动的向心力大小 F_n ；
- (2) 钢球做匀速圆周运动的角速度大小 ω ；
- (3) 钢球做匀速圆周运动的周期 T 。

【答案】 (1) $\frac{mgr}{h}$

(2) $\sqrt{\frac{g}{h}}$

(3) $2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$

例 3. 游乐场里的“飞天秋千”游戏开始前，座椅由钢丝绳竖直悬吊在半空，钢丝绳的长度为 l ，座椅和人的质量为 m ，绳到转轴的距离为 $r = \frac{2}{5}l$ 。秋千由静止开始转动，匀速转动时钢丝绳摆离竖直方向，座椅比静止时升高 $h = \frac{1}{5}l$ ，人和座椅可视为质点，其简化模型如图所示。已知重力加速度为 g ，求：



- (1) 匀速转动时绳的拉力大小；
- (2) 人运动的线速大小；

【答案】 (1) $\frac{5}{4}mg$ ；

(2) $\sqrt{\frac{3gl}{4}}$ 。

二、动态变化分析

考法说明：分析摆长 L 或摆角 θ 变化时，角速度 ω 、周期 T 的变化规律。

核心结论：

- 若缓慢缩短摆长 L ， θ 不变时， ω 增大， T 减小。
- 若增大 θ （摆长 L 固定）， ω 增大， T 减小。

例 1. 有一段单人绸吊空中表演，运动员拉住一根长绸带在水平面内做近似圆周运动，如图（b）所示，若运动员重心到悬点距离不变，绸带与竖直方向夹角为 θ 。

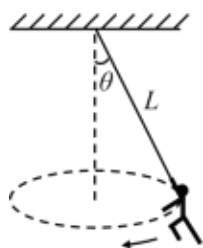
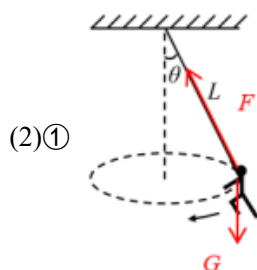


图 (b)

- ① 在图（b）画出运动员的受力示意图 _____。
- ② 运动员做匀速圆周运动的向心力由 _____ 力提供。
- ③ 若 θ 增大，其他条件不变，运动员的周期会 _____

A. 增大 B. 减小 C. 不变

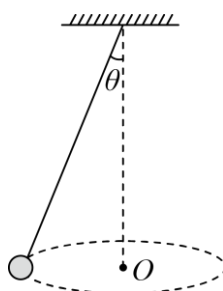
【答案】



② 合外力或拉力沿水平方向的分力

③ B. 减小

例 2. 如图所示，轻质细绳一端固定在天花板上，另一端连接一个可视为质点的小球，小球在水平面内绕 O 点做匀速圆周运动，连接小球的细绳与竖直方向的夹角为 θ ，则小球做圆周运动的周期取决于（ ）



A. 小球的质量

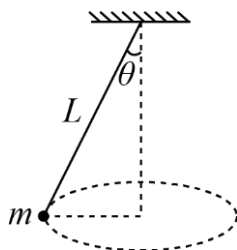
B. 细绳的长度

C.悬点与 O 点的距离

D.细绳与竖直方向的夹角

【答案】 C

例 3. (多选)如图所示, 长为 L 的细绳一端固定, 另一端系一质量为 m 的小球. 给小球一个合适的初速度, 小球便可在水平面内做匀速圆周运动, 这样就构成了一个圆锥摆, 设细绳与竖直方向的夹角为 θ . 下列说法中正确的是 ()



A.小球受重力、绳的拉力和向心力作用

B.小球只受重力和绳的拉力作用

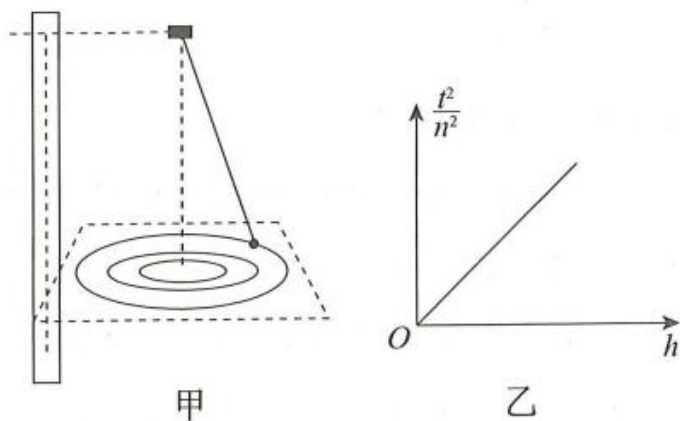
C. θ 越大, 小球运动的速度越大

D. θ 越大, 小球运动的周期越大

【答案】 BC

三、“用圆锥摆验证向心力的表达式”实验

例 1. 某同学设计了“用圆锥摆验证向心力的表达式”实验. 如图甲所示, 悬点刚好与一个竖直的刻度尺零刻度线对齐. 将画着几个同心圆的白纸置于水平桌面上, 使钢球静止时刚好位于圆心. 用手带动钢球, 设法使它刚好沿纸上某个半径为 r 的圆周运动, 钢球的质量为 m , 重力加速度为 g .



(1)用停表记录的钢球运动 n 圈的总时间为 t , 那么钢球做圆周运动所需要的向心力的表达式为 $F_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2)通过刻度尺测得钢球轨道平面到悬点的距离为 h , 那么钢球做圆周运动时外力提供的向心力的表达式为 $F = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3)改变钢球做圆周运动的半径, 多次实验, 得到如图乙所示的 $\frac{t^2}{n^2} - h$ 关系图像. 请分析说明, 利用这个图像, 是否可以粗略验证向心力的表达式.

【答案】 (1) $m \frac{4\pi^2 n^2}{t^2} r$

$$(2) \, mg \frac{r}{h}$$

(3) 可以.

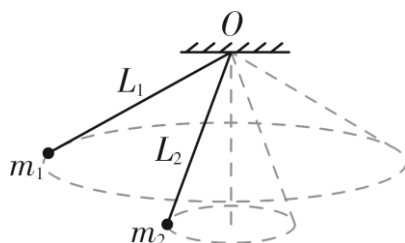
四、多摆比较

考法说明：比较不同圆锥摆的角速度、周期或拉力。

核心规律：

- 同一角速度下，摆长越长，摆角越大。
- 同一摆角下，摆长越长，周期越大。

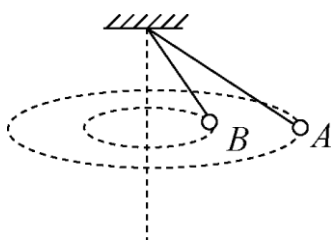
例 1. 如图所示，两根长度相同的细线分别系有两个完全相同的小球，细线的上端都系于 O 点，设法让两个小球均在水平面上做匀速圆周运动。已知 L_1 跟竖直方向的夹角为 60° ， L_2 跟竖直方向的夹角为 30° ，下列说法正确的是（ ）



- A. 细线 L_1 和细线 L_2 所受的拉力大小之比为 3:1 B. 小球 m_1 和 m_2 的角速度大小之比为 3:1
C. 小球 m_1 和 m_2 的向心力大小之比为 3:1 D. 小球 m_1 和 m_2 的线速度大小之比为 $3\sqrt{3}:1$

【答案】 C

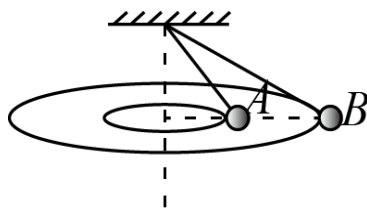
例 2. 如图所示，两根长度不同的细线分别挂着质量相等的 A 、 B 两球，细线上端固定在同一点。当 A 、 B 两球在同一水平面内做匀速圆周运动时，下列说法正确的是（ ）



- A. 两球的周期相等 B. 两球的线速度大小相等
C. 两球所受的向心力大小相等 D. 细线对两球的拉力大小相等

【答案】 A

例 3. (多选) 两根长度不同的细线下面分别悬挂两个完全相同的小球 A 、 B ，细线上端固定在同一点，绕共同的竖直轴在同一水平面内做匀速圆周运动。已知 A 球细线 L_1 跟竖直方向的夹角为 30° ， B 球细线 L_2 跟竖直方向的夹角为 60° ，下列说法正确的是（ ）



A. 细线 L_1 和细线 L_2 所受的拉力大小之比为 $1:\sqrt{3}$

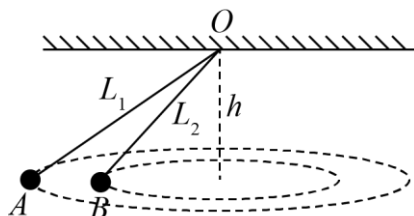
B. 小球A和B的向心力大小之比为 $1:3$

C. 小球A和B的角速度大小之比为 $1:\sqrt{3}$

D. 小球A和B的线速度大小之比为 $1:\sqrt{3}$

【答案】 AB

例 4. 如图所示，质量相等的A、B两个小球悬于同一悬点O，且在O点下方垂直距离 $h = 1\text{m}$ 处的同一水平面内做匀速圆周运动，悬线长 $L_1 = 3\text{m}$ ， $L_2 = 2\text{m}$ ，则A、B两小球（ ）



A. 周期之比 $T_1:T_2 = 2:3$

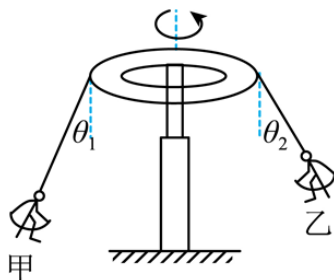
B. 角速度之比 $\omega_1:\omega_2 = 3:2$

C. 线速度之比为 $v_1:v_2 = \sqrt{8}:\sqrt{3}$

D. 向心加速度之比 $a_1:a_2 = 8:3$

【答案】 C

例 5. 游乐场中的“旋转飞椅”用钢绳悬挂在水平转盘边缘的同一圆周上，转盘绕穿过其中心的竖直轴转动。甲、乙两人同时乘坐“旋转飞椅”时可简化为如图所示的模型，甲对应的钢绳长度大于乙对应的钢绳长度，当转动稳定后，甲、乙对应的钢绳与竖直方向的夹角分别为 θ_1 、 θ_2 ，钢绳的质量不计，忽略空气阻力，则转动稳定时（ ）



A. 甲、乙两人所处的高度可能相同

B. 甲、乙两人到转轴的距离可能相等

C. θ_1 与 θ_2 可能相等

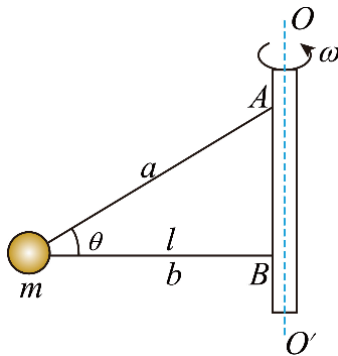
D. 甲、乙两人做圆周运动时所需的向心力大小可能相等

【答案】 D

五、临界问题

考法说明：主要的临界条件包括：绳子最大拉力，接触面弹力为零，绳子拉力为零。

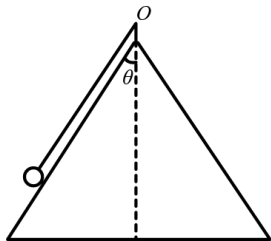
例 1. 如图所示，质量为 m 的小球由轻绳 a 和 b 分别系于一轻质细杆的 A 点和 B 点，当轻杆绕轴 OO' 以角速度 ω 匀速转动时，小球在水平面内做匀速圆周运动， a 绳与水平面成 θ 角， b 绳平行于水平面且长为 l ，重力加速度为 g ，则下列说法正确的是（ ）



- A. a 绳与水平方向夹角 θ 随角速度 ω 的增大而一直减小
- B. a 绳所受拉力随角速度的增大而增大
- C. 当角速度 $\omega > \sqrt{\frac{g}{l \tan \theta}}$ 时， b 绳将出现弹力
- D. 若 b 绳突然被剪断，则 a 绳的弹力一定发生变化

【答案】 C

例 2. 如图所示，一个光滑的圆锥体固定在水平桌面上，其轴线沿竖直方向，母线与轴线的夹角 $\theta = 30^\circ$ ，一条长为 l 的绳，一端固定在圆锥体的顶点 O ，另一端系一个质量为 m 的小球（可视为质点），小球以角速度 ω 绕圆锥体的轴线在水平面内做匀速圆周运动。试分析：



(1) 小球以角速度 $\omega = \sqrt{\frac{2g}{3l}}$ 转动时，绳子的拉力和圆锥体对小球的支持力。

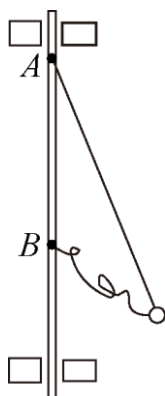
(2) 小球以角速度 $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{3l}}$ 转动时，绳子的拉力和圆锥体对小球的支持力。

【答案】 (1) 小球以角速度 $\omega = \sqrt{\frac{2g}{3l}}$ 转动时，绳子的拉力 $\frac{\sqrt{3}}{2}mg + \frac{1}{6}mg$ 和圆锥体对小球的支持力 $(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6})mg$

(2) 小球以角速度 $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{3l}}$ 转动时，绳子的拉力 $\frac{4}{3}mg$ 和圆锥体对小球的支持力为

零

例 3. 如图所示，一个质量为 m 的小球由两根细绳固定在竖直转轴上的 A 、 B 两处， AB 间距为 L ， A 处绳长为 $\sqrt{2}L$ ， B 处绳长为 L ，两根绳能承受的最大拉力均为 $2mg$ ，转轴带动小球转动时，小球在水平面内做匀速圆周运动。则：



(1) 当 B 处绳子刚好被拉直时，小球的角速度 ω 为多大。

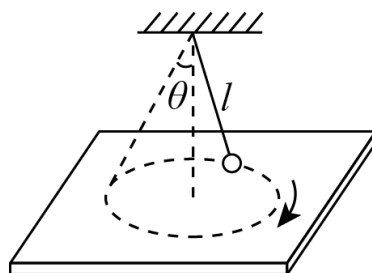
(2) 转轴可以带动小球以不同的角速度匀速转动，试求出在两绳均未拉断前细线 A 处绳所受拉力大小随角速度 ω^2 的变化关系式。

【答案】 (1) $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

(2) 当绳子被拉直且绳子没有拉断时 $T_A = \frac{mg}{\cos \theta} = \sqrt{2}mg$

当绳子没有被拉直时有 $T_A = \sqrt{2}mL\omega^2$, $0 < \omega < \sqrt{\frac{g}{L}}$

例 4. 如图所示，长为 l 的绳子下端连着质量为 m 的小球，上端悬于天花板上，把绳子拉直，绳子与竖直线夹角为 60° ，此时小球静止于光滑的水平桌面上。问：



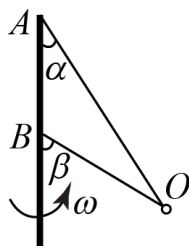
(1) 当球以 $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ 作圆锥摆运动时，绳子张力 T_1 为多大，桌面受到压力 N_1 为多大。

(2) 当球以 $\omega_2 = \sqrt{\frac{4g}{l}}$ 作圆锥摆运动时，绳子张力 T_2 为多大，桌面受到压力 N_2 为多大。

【答案】 (1) $N_1 = \frac{1}{2}mg$ 、 $T_1 = mg$

(2) $N_2 = 0$ 、 $T_2 = 4mg$

例 5. 如图所示，用两根轻绳系住一个质量为 $m = 0.7\text{kg}$ 的小球，两根绳子的另一端分别固定于竖直转动轴的 A 、 B 两处，上面绳长 $l = 2\text{m}$ ，两绳拉直时与轴的夹角分别为 $\alpha = 37^\circ$ 和 $\beta = 53^\circ$ 。则：（已知 $g = 10\text{m/s}^2$ ， $\sin 37^\circ = 0.6$ ， $\cos 37^\circ = 0.8$ ）



(1) 仅上绳 AO 绷紧，求小球转动的角速度 ω_1 的取值范围。

(2) 仅下绳 BO 绷紧，求小球转动的角速度 ω_2 的取值范围。

(3) 当球随转轴转动而以角速度 $\omega_3 = 3\text{rad/s}$ 做匀速圆周运动时，求两绳的拉力 F_A 、 F_B 分别为多大。

【答案】 (1) $\omega_1 \leq 2.5\text{rad/s}$

(2) $\omega_2 \geq \frac{10}{3}\text{rad/s}$

(3) $F_A = 3.8\text{N}$, $F_B = 6.6\text{N}$